XXI Сем. № 5.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 245.

Диффузія металловъ.

Обыкновенно металлическіе сплавы разсматриваютъ какъ *твердые растворы*, принимая, что атомы твердыхъ металловъ находятся въ постоянномъ активномъ движеніи. На это указываетъ цѣлый рядъ фактовъ. Такъ напр. извѣстно, что металлы способны переходить изъ одного аллотропическаго видоизмѣненія въ другое, измѣняя свои физическія свойства; золотое серебро Кэри-Ли при долгомъ лежаніи переходитъ въ обыкновенное серебро. Извѣстно также, что твердые металлы растворяютъ въ себѣ газы, что газы свободно движутся внутри металловъ и проникаютъ сквозь нихъ. При накаливаніи твердаго желѣза съ углемъ желѣзо поглощаетъ около 5% послѣдняго (цементація желѣза), и, въ свою очередь, проникаетъ въ нѣкоторомъ количествѣ въ уголь. *Кольсонъ*, накаливая платину, окруженную углемъ въ тиглѣ, въ составъ котораго входилъ кремнеземъ, убѣдился, что платина поглощаетъ кремнеземъ, который, слѣдовательно, диффундируетъ въ этомъ случаѣ въ платину сквозь слой угля. Извѣстно также, что цинковые листы, покрытые тонкимъ слоемъ мѣди, бѣлѣютъ со временемъ, что можетъ быть объяснено прониканіемъ мѣди внутрь цинковаго листа. *Faraday* и *Stodart* показали еще въ 1820 году, что платина и сталь сплавляются при температурѣ, при которой сталь еще не плавится, а знаменитый *Graham*, много занимавшійся диффузіей, въ 1863 году высказалъ парадоксальное на первый взглядъ положеніе, что „три состоянія матеріи (твердое, жидкое и газообразное) вѣроятно имѣются на лицо во всякомъ твердомъ или жидкомъ веществѣ, но что одно изъ

нихъ лишь господствуетъ надъ другими". *Spring* доказалъ (1882), что сплавы могутъ быть получены сильнымъ сжатіемъ мелко раздробленныхъ частицъ металловъ при обыкновенной температурѣ или просто соединеніемъ твердыхъ металлическихъ массъ, прижатыхъ другъ къ другу при 180° для свинца и олова, 400° для мѣди и цинка (олово плавится при 227°, цинкъ при 415°). Напомнимъ. наконецъ, объ испареніи твердыхъ веществъ при обыкновенной температурѣ: и золото и стекло, по словамъ *R. Boyle*'я, имѣютъ „свою маленькую атмосферу и могутъ терять въ вѣсѣ втеченіе продолжительнаго времени".

Въ недавнее время извѣстнымъ англійскимъ ученымъ *W. C. Roberts-Austen*'омъ произведенъ былъ рядъ опытовъ надъ диффузіей металловъ *). Опыты эти доставили очень сильное подтвержденіе указанному взгляду на сплавы и мы изложимъ ихъ подробно.

Оствальдъ совершенно справедливо замѣтилъ, что постановка точныхъ опытовъ надъ диффузіей есть одна изъ труднѣйшихъ задачъ практической физики. Это замѣчаніе Оствальда относится къ диффузіи солей въ растворахъ. Несомнѣнно, что изученіе диффузіи расплавленныхъ металловъ представляетъ много больше трудностей.

Одна изъ этихъ трудностей заключается въ точномъ измѣреніи высокихъ температуръ. Авторъ пользовался при своихъ изслѣдованіяхъ либо особымъ регистрирующимъ пирометромъ, либо термоэлектрическими парами, которыя помѣщались въ нѣсколькихъ мѣстахъ въ баню изъ жидкаго металла или прямо въ печь. Въ банѣ или въ печи ставились трубки, наполненныя свинцомъ. и въ этомъ свинцѣ диффундировало золото, сплавы золота и другіе металлы снизу вверхъ, т. е. противъ дѣйствія тяжести. Количество диффундировавшаго металла опредѣлялось такимъ образомъ, что свинцу въ трубкѣ давали отвердѣть, затѣмъ разрѣзывали твердый металлъ на отдѣльные кусочки и подвергали ихъ анализу.

Опыты Austen'а приводятъ къ тому общему выводу, что законы диффузіи, установленные для солей, вполнѣ примѣнимы и къ металламъ. Еще въ 1855 г. Fick далъ для линейнаго движенія диффузіи слѣдующее выраженіе:

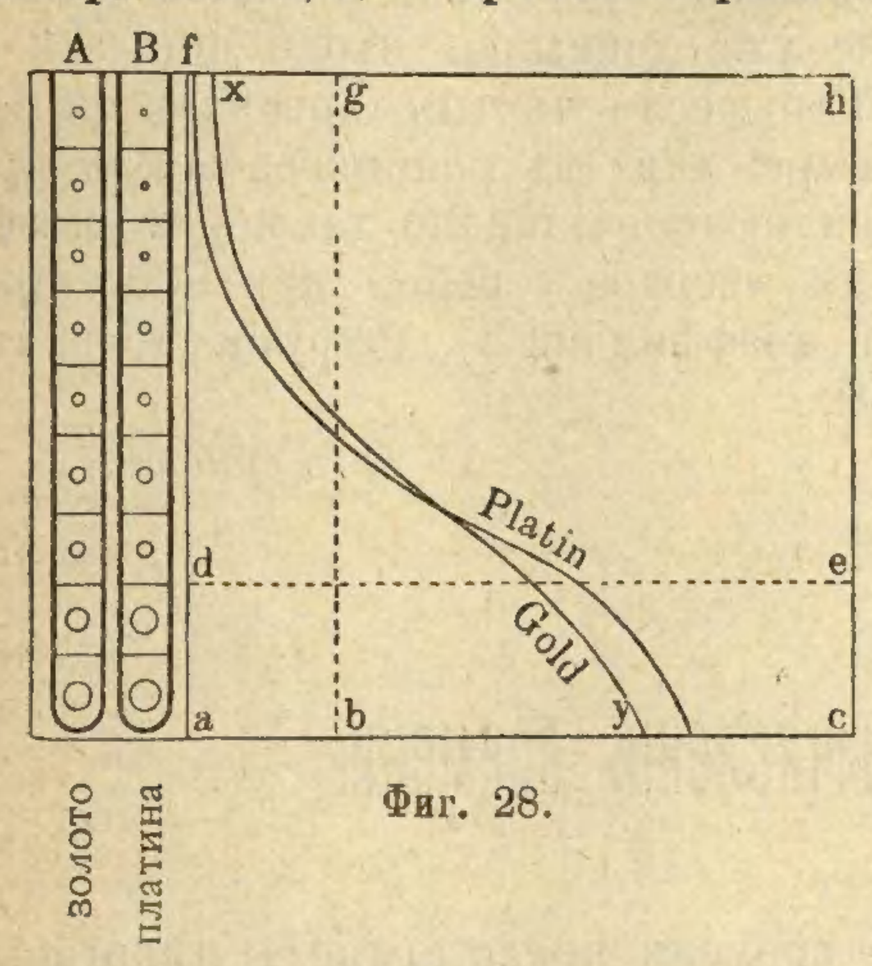
$$\frac{dv}{dt} = k\,\frac{d^2v}{d^2x},$$

гдѣ x есть разстояніе по направленію диффузіи, v — степень концентраціи диффундирующаго металла, t — время, а k — постоянная диффузіи, т. е. число, выражающее въ граммахъ количество металла, проходящее сквозь единицу сѣченія (1 cm^2) въ единицу времени (1 сутки), если разность концентрацій, выраженныхъ въ граммахъ на кубическій центиметръ, поддерживается равной единицѣ съ обѣихъ сторонъ слоя, толщиною въ 1 cm. Законъ *Fick*'а вполнѣ оправдывается для металловъ.

---

*) Оригинальная работа *W. C. Roberts-Austen'а* была опубликована въ „Proc. of the Roy. Society", 1896, 281, и въ „Nature", 1896, 55. Мы пользуемся подробнымъ ея изложеніемъ въ „Naturwiss. Rundschau". 1896, 390.

На прилагаемомъ рисункѣ (фиг. 28) изображены графически результаты диффузіи платины и золота въ жидкій свинецъ за 24 часа. А и В изображаютъ высоту и поперечникъ столбовъ жидкаго свинца, а нарисованные въ нихъ кружки соотвѣтствуютъ шарикамъ золота или платины, нѣсколько меньшимъ, чѣмъ тѣ, которые были выдѣлены изъ кружковъ свинца, ограниченныхъ горизонтальными линіями, послѣ его затвердѣванія; двѣ кривыя справа изображаютъ состояніе диффузіи через 24 часа; ординаты этихъ кривыхъ соотвѣтствуютъ разстояніямъ по направленію тока диффузіи, абсциссы—концентраціямъ. До начала диффузіи концентрація золота (платины) въ нижней части трубки выражается длиной *ac*, а площадь *aced* выражаетъ все количество золота (платины), которое находилось сперва подъ линіей *de*. Если бы диффузія вполнѣ закончилась, такъ что составъ сплава былъ бы однороденъ во всѣхъ частяхъ трубки, то это изобразилось бы линіей *bg* и площадь *abgf*, равная площади *aced*, выражала бы тогда и общее количество золота и его распредѣленіе. Въ дѣйствительности по окончаніи опыта золото распредѣлилось такъ, какъ показываетъ кривая *xy*. Другая кривая соотвѣтствуетъ платинѣ. Изъ этого чертежа видно, что золото диффундируетъ быстрѣе платины. Вообще чѣмъ быстрѣе идетъ диффузія, тѣмъ ближе подходитъ за данное время кривая, изображающая диффузію, къ прямой *bg*.



Фиг. 28.

Вотъ нѣкоторые численные результаты опытовъ Roberts-Austen'а: коэффиціентъ диффузіи золота въ свинцѣ при 500° равенъ 3,19; золота въ висмутѣ—4,52; въ оловѣ—4,65; серебра въ оловѣ—4,14; свинца въ оловѣ—3,88; родія въ свинцѣ—3,04; платины въ свинцѣ при 490°—1,69; золота въ свинцѣ при той же температурѣ—3,03; золота въ ртути при 11°—0,72. Для сравненія напомнимъ, что коэффиціентъ диффузіи соляной кислоты въ водѣ при 5° равенъ 1,74, а натрія въ водѣ при 18°—1,04.

Чрезвычайно интересны результаты, полученные авторомъ при изученіи диффузіи *твердыхъ металловъ* другъ въ друга, при сравнительно низкой температурѣ.

Къ одному изъ основаній твердаго свинцоваго цилиндра длиною въ 70 mm прикладывался либо кусочекъ твердаго золота либо сплава золота со свинцомъ и затѣмъ все это поддерживалось 31 день при температурѣ въ 251°, т. е. на 75° ниже температуры плавленія свинца. Затѣмъ свинцовый цилиндръ разрѣзывался на части и въ каждой части опредѣлялось количество золота. Былъ произведенъ цѣлый рядъ подобныхъ опытовъ при различныхъ температурахъ, до температуры лабораторіи включительно.

Коэффиціентъ диффузіи золота оказался равнымъ

въ жидкомъ	свинцѣ	при	500°	3,19
„ твердомъ	„	„	251°	0,03
„ „	„	„	200°	0,007
„ „	„	„	165°	0,004
„ ,,	,,	,,	100°	0,00002

Результаты опытовъ, произведенныхъ при болѣе низкихъ температурахъ, еще не опубликованы, но уже доказано, что и при этихъ условіяхъ диффузія имѣетъ мѣсто. Такъ если чистыя поверхности золота и свинца поддерживаются четыре дня въ соприкосновеніи при 40° въ пустотѣ, то онѣ прочно скрѣпляются. Найдено также, что коэффиціентъ диффузіи твердаго золота въ твердое серебро при 800° приблизительно того же порядка, что и коэффиціентъ диффузіи твердаго золота въ твердый свинецъ при 100°.

В. Гернетъ.

Особенности при вычисленіи времени.

Рѣшеніе задачъ на вычисленіе времени представляетъ нѣкоторыя не лишенныя интереса особенности; между тѣмъ въ учебникахъ ариѳметики, по крайней мѣрѣ въ наиболѣе извѣстныхъ и наиболѣе распространенныхъ изъ нихъ, объ этихъ особенностяхъ совсѣмъ не упоминается и при рѣшеніи задачъ на время указываются даже такіе способы, которые нерѣдко приводятъ къ невѣрному результату.

Предлагаемая статья есть попытка указать правильные пріемы для рѣшенія задачъ на вычисленіе времени.

Нѣкоторыя изъ единицъ, употребляемыхъ при измѣреніи времени, имѣютъ непостоянное значеніе; такъ мѣсяцъ содержитъ 28, 29, 30 и 31 день, а годъ 365 и 366 дней. Поэтому составныя именованныя числа, выражающія время въ годахъ и мѣсяцахъ, будутъ имѣть, вообще говоря, неопредѣленное значеніе. Такъ, число 3 мѣсяца 10 дней можетъ имѣть 99, 100, 101 и 102 дня. То же число получитъ вполнѣ опредѣленное значеніе, если мы знаемъ, съ какого момента считается это число.

Другая особенность при измѣреніи времени состоитъ въ томъ, что въ разговорномъ языкѣ время обыкновенно выражается порядковыми числительными, ариѳметическія же дѣйствія производятся надъ числительными количественными.

Эти особенности при измѣреніи времени вызываютъ также и особые пріемы при рѣшеніи задачъ на время.

Задача 1. Мальчикъ поступилъ въ гимназію 15 августа 1884 года и черезъ 5 лѣтъ 6 мѣс. 20 дней умеръ. Когда онъ умеръ?

Чтобы узнать, когда умеръ мальчикъ, слѣдуетъ къ 15 августа 1884 года присчитать сначала 5 лѣтъ, затѣмъ 6 мѣс. и наконецъ 20 дней. Черезъ 5 лѣтъ послѣ поступленія мальчика въ гимназію настанетъ 15 августа 1889 года, черезъ 6 мѣс. послѣ того — 15 февраля 1890 года, а черезъ 20 дней послѣ этого—7 марта 1890 года.

Ту же задачу можно рѣшить и иначе; для этого опредѣлимъ, сколько полныхъ лѣтъ, мѣсяцевъ и дней прошло отъ Р. Х. до поступленія мальчика въ гимназію, затѣмъ прибавимъ къ этому числу 5 лѣтъ 6 мѣс. 20 дней.

+	1883 года —	7 мѣс. —	14 дней
	5 „ —	6 „ —	20 „
	1888 „ —	13 „ —	34
	1889 лѣтъ—	2 мѣс. —	6 дней.

Здѣсь, при обращенiи дней въ мѣсяцы, надо было взять 28 дней, такъ какъ составлялся февраль 1890 года.

Задача 2. 7-го марта 1890 года умеръ мальчикъ черезъ 5 лѣтъ 6 мѣс. 20 дней послѣ поступленія въ гимназію. Когда онъ поступилъ въ гимназію?

Послѣ поступленія мальчика въ гимназію прошло сначала 5 полныхъ лѣтъ, потомъ 6 мѣс., затѣмъ 20 дней и послѣ этого наступило 7-ое марта 1890 года. Поэтому, чтобы опредѣлить время поступленія его въ гимназію, мы должны отсчитать отъ 7 марта 1890 года назадъ сначала 20 дней, потомъ 6 мѣс. и затѣмъ уже 5 лѣтъ.

За 20 дней до 7 марта 1890 года было 15 февраля 1890 года, за 6 мѣс. до этого—15 августа 1889 года, а за 5 лѣтъ до послѣдняго числа—15 августа 1884 года.

Ту же задачу можно рѣшить и иначе; для этого опредѣлимъ, сколько полныхъ лѣтъ, мѣсяцевъ и дней прошло отъ Р. Х. до смерти мальчика и отнимемъ отъ этого числа 5 лѣтъ 6 мѣс. 20 дней.

1889 лѣтъ —	2 мѣс. —	6 дней
— 5 „ —	6 „ —	20 „
1883 года —	7 мѣс. —	14 дней

Здѣсь, при обращенiи мѣсяца въ дни, слѣдовало взять 28 дней, такъ какъ обращался февраль 1890 года.

Задача 3. Мальчикъ поступилъ въ гимназію 15 августа 1884 г., а 7 марта 1890 года умеръ. Сколько времени мальчикъ пробылъ въ гимназiи.

Чтобы получить промежутокъ времени, считающiйся отъ 15 августа 1884 года, замѣтимъ, что отъ этого дня до смерти мальчика прошло 5 полныхъ лѣтъ (до 15 августа 1889 года), 6 мѣсяцевъ (до 15 февраля 1890 года) и еще время отъ 15 февраля 1890 года до 7 марта. Такъ какъ февраль 1890 года имѣетъ 28 дней, то послѣднiй промежутокъ равенъ 20 днямъ. Такимъ образомъ мальчикъ пробылъ въ гимназiи 5 лѣтъ 6 мѣс. 20 дней.

Ту же задачу можно рѣшить и иначе; для этого узнаемъ, сколько полныхъ лѣтъ, мѣс. и дней прошло отъ Р. Х. сначала до смерти мальчика, затѣмъ до его поступленія въ гимназію, и вычтемъ изъ перваго числа второе.

1889 лѣтъ —	2 мѣс. —	6 дней
1883 „ —	7 „ —	14 „
5 лѣтъ —	6 мѣс. —	20 дней

Здѣсь, при обращеніи мѣсяца въ дни, взято 28 дней, потому что обращался февраль 1890 года.

Примѣчаніе. Иногда при рѣшеніи задачъ послѣдней группы время выражаютъ въ годахъ и дняхъ, а не мѣсяцахъ. Если при этомъ число дней вычитаемаго болѣе $59 = 31 + 28$, то въ дни слѣдуетъ обращать *текущій годъ вычитаемаго*, а не уменьшаемаго; если же число дней въ вычитаемомъ равно или менѣе 59, то въ дни слѣдуетъ обращать послѣдній годъ (изъ полныхъ) уменьшаемаго. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ, отсчитавъ отъ 1889 лѣтъ 65 дней сначала 1883 года, мы должны затѣмъ отсчитать первые 227 дней *отъ слѣдующаго* 1884 года (високоснаго).

Подобныя же особенности представляются и при рѣшеніи задачъ другихъ группъ, когда время въ нихъ выражено въ годахъ и дняхъ, а не мѣсяцахъ.

Во всѣхъ предыдущихъ задачахъ промежутокъ времени между двумя событіями считался, начиная отъ предшествующаго событія. Если бы этотъ промежутокъ считался, начиная отъ послѣдующаго событія назадъ, то предыдущія задачи пришлось бы рѣшать иначе.

Задача 4. 15 августа 1884 года мальчикъ поступилъ въ гимназію за 5 лѣтъ 6 мѣс. 20 дней до своей смерти. Когда онъ умеръ?

Такъ какъ счетъ времени въ данномъ промежуткѣ начинается со дня смерти мальчика, то здѣсь придется присчитать ко времени его поступленія въ гимназію сначала 20 дней, затѣмъ 6 мѣс. и потомъ уже 5 лѣтъ.

1883 года —	7 мѣс. —	14 дней
+ 5 „ —	6 „ —	20 „
1888 „ —	13 „ —	34
1890 лѣтъ —	2 мѣс. —	3 дня.

Здѣсь изъ дней пришлось составлять августъ 1884 года, поэтому былъ взятъ 31 день *).

Задача 5. 7 марта 1890 года умеръ мальчикъ, поступившій за 5 лѣтъ 6 мѣс. 20 дней до смерти въ гимназію. Когда онъ поступилъ въ гимназію?

---

*) Разница въ результатахъ при рѣшеніи 1-й и 4-й задачи происходитъ оттого, что число 5 лѣтъ 6 мѣс. 20 дней, считаемое отъ 14 августа 1884 года, на 3 дня меньше, чѣмъ то же число, считаемое отъ дня смерти мальчика назадъ.

1889 лѣтъ — 2 мѣс. —	6 дней	
— 5 „ — 6 „ — 20 „		
1884 „ — 8 „ — 17		
1883 года — 7 мѣс. — 17 дней.		

Отнявъ здѣсь сначала 5 лѣтъ, получимъ 1884 года 2 мѣс. 6 дней; вычтя потомъ 6 мѣс., найдемъ 1883 года 8 мѣс. 6 дней; отнявъ наконецъ 20 дней, получимъ 1883 года 7 мѣс. 17 дней.

При этомъ способѣ вычитанія пришлось обращать въ мѣсяцы 1884 годъ, а въ дни августъ 1884-го года (послѣдній годъ и мѣсяцъ остатка).

Задача 6. Мальчикъ поступилъ въ гимназію 15 августа 1884 г., а 7 марта 1890 года умеръ. За сколько времени до смерти поступилъ онъ въ гимназію?

Для рѣшенія этой задачи замѣтимъ, что отъ 7 марта 1890 года до поступленія мальчика въ гимназію прошло 5 полныхъ лѣтъ (до 7 марта 1885 года), затѣмъ 6 полныхъ мѣсяцевъ (до 7 сентября 1884 г.) и еще 17 + 6 = 23 дня (отъ 7 сентября до 15 августа 1884 года).

Если захотимъ рѣшить ту же задачу вычитаніемъ составныхъ именованныхъ чиселъ, то, при обращеніи года въ мѣсяцы и мѣсяца въ дни, должны будемъ взять послѣдній (текущій) годъ и мѣсяцъ въ вычитаемомъ (а не въ уменьшаемомъ). Въ нашемъ примѣрѣ это будетъ 1884 годъ и августъ 1884 года.

1889 лѣтъ — 2 мѣс. — 6 дней
— 1883′ — — 7′ „ — 14 „
5 лѣтъ — 6 мѣс. — 23 дня

Такимъ образомъ, при рѣшеніи задачъ на время можно употреблять разные пріемы. Наиболѣе простой и вмѣстѣ съ тѣмъ самый естественный изъ нихъ будетъ способъ присчитыванія и отсчитыванія времени; изъ этого способа выводятся уже и всѣ остальные.

Если время выражено въ годахъ, мѣсяцахъ и дняхъ, то рѣшеніе задачъ первыхъ трехъ группъ (чаще всего встрѣчаемыхъ) сводится къ обыкновенному сложенію и вычитанію составныхъ именованныхъ чиселъ, рѣшеніе же задачъ послѣднихъ трехъ группъ представляетъ уже нѣкоторыя особенности, характерныя для каждой группы. Если время выражено въ годахъ и дняхъ (а не мѣсяцахъ), то рѣшеніе задачъ каждой группы представляетъ еще большія особенности и требуетъ еще болѣе сложныхъ соображеній, какъ то, напр., указано при рѣшеніи задачъ 3-й группы. Если, наконецъ, время будетъ выражено только въ дняхъ, а не годахъ и мѣсяцахъ (годы и мѣсяцы обращены въ дни), то всѣ особенности при рѣшеніи задачъ на время исчезаютъ. Однако прибѣгать къ послѣднему пріему бываетъ не всегда выгодно, такъ какъ при этомъ могутъ получиться довольно большія числа и, слѣдовательно, станутъ сложнѣе вычисленія.

Б. Чихановъ (Люблинъ)

Долго сохраняющаяся альбуминно-арро-рутная бумага.

Проф. *Ф. А. Патенко* даетъ во 2-мъ вып. VIII-го тома „Трудовъ Отдѣленія Физическихъ Наукъ Общ. Любителей Естествознанія“ слѣдующій простой способъ приготовленія альбуминно-аррорутной чувствительной бумаги.

Чтобы отпечатокъ на бумагѣ былъ красивъ, надо чтобы изображеніе образовалось въ самыхъ поверхностныхъ слояхъ, не проникая вглубь. Для этого бумага первоначально проклеивается. За 1—2 сутокъ до проклеиванія надо взять

Лучшаго столярнаго клея (русскаго)	6 g.
Тимоловой воды	30 cm³.

Клей наливается тимоловой водой и оставляется набухать. Для приготовленія тимоловой воды въ хорошо закупоривающуюся склянку бросаютъ нѣсколько кусочковъ тимола, наливаютъ водой и оставляютъ стоять, взбалтывая по временамъ.

Въ то же время готовятъ слѣдующій растворъ:

Сухого бѣлка изъ куриныхъ яицъ	18 g.
Дестиллир. воды	100 cm³
Тройного амміака	10 капель.

Этотъ растворъ тоже оставляютъ стоять, отъ времени до времени размѣшивая его стеклянной палочкой. Если сухого бѣлка нѣтъ подъ руками, то выпускаютъ бѣлокъ изъ 10 свѣжихъ куриныхъ яицъ, взбиваютъ его въ пѣну и оставляютъ на ночь въ покоѣ. Утромъ сливаютъ отстоявшійся бѣлокъ въ глубокую тарелку и, накрывъ листомъ чистой толстой бумаги, ставятъ лѣтомъ въ погребъ на 2 недѣли, а зимой—въ теплую кладовую на 1 мѣсяцъ. За это время бѣлокъ успѣетъ нѣсколько загнить, что необходимо для его пригодности, и, кромѣ того, сгустится на столько, что по концентраціи приблизительно будетъ соотвѣтствовать вышеуказанному раствору сухого бѣлка. Передъ употребленіемъ его сливаютъ въ стаканчикъ, прибавляютъ амміакъ и даютъ отстояться.

Въ день приготовленія клеевой массы берутъ:

аррорута	6 g.
дестил. воды	80 cm³
глицерина	15 cm³.

Сперва смѣшиваютъ глицеринъ съ водою, затѣмъ прибавляютъ небольшое количество этой смѣси къ аррорут, хорошо растираютъ его, чтобы не оставалось комочковъ, и приливаютъ остальную воду. Все это дѣлаютъ въ эмальированной кострюлькѣ вмѣстимостью около фунта воды. Затѣмъ кострюльку ставятъ на керосиновую или бензиновую кухню и варятъ, постоянно размѣшивая, пока масса не станетъ густой и прозрачной.

Послѣ этого расплавляютъ набухшій клей, поставивъ стаканчикъ съ нимъ въ теплую воду и нагрѣвая ее, и въ это же время готовятъ растворъ:

дестилл. воды . . . . 20 cm³
чистой поваренн. соли . . . . 2 g.
нашатыря . . . . 1,5 g.;

этотъ растворъ и клей приливаютъ къ арроруту и тщательно смѣшиваютъ, а когда смѣсь охладится до 40⁰, то приливаютъ къ ней и бѣлокъ, сливая осторожно свѣтлую его часть съ осадка, и снова смѣшиваютъ. Послѣ этого можно приступить къ проклеиванію*). Для этого на углы чертежной доски или рамки подходящаго формата налѣпляютъ маленькіе шарики воска, накладываютъ сверху бумагу и прижимаютъ ее къ воску**). Отливъ часть клеевой массы на блюдце, берутъ плоскую, широкую щетинную кисть (7 cm ширины) и ею наносятъ массу на бумагу въ такомъ количествѣ, чтобы бумага хорошо смачивалась. Промазавъ всю поверхность листа ровнымъ слоемъ, выжимаютъ кисть о край блюдца и проходятъ листъ кистью въ одномъ направленіи, сглаживая и уравнивая массу; затѣмъ кисть снова отжимаютъ и, повернувъ доску на 90⁰, опять проходятъ кистью, снова поворачиваютъ листъ и т. д. до тѣхъ поръ, пока отъ кисти уже не остается полосъ. Тогда берутъ круглую кисть—лучше всего барсуковый флейсъ, и его круговыми движеніями окончательно уравниваютъ слой клеевой массы. Вся описанная операція совершается минуты въ 3, и послѣ нея листъ подвѣшиваютъ для просушиванія. Въ такомъ видѣ бумага сохраняется неопредѣленно долгое время.

Передъ серебреніемъ надо этой бумагѣ дать отсырѣть, или продержавъ ее нѣсколько часовъ въ сыромъ мѣстѣ, или налѣпивъ ее на доску и опрокинувъ надъ цинковой кюветкой соотвѣтственной величины съ налитою въ нее теплой водой. Чтобы поддерживать температуру воды, можно подъ кюветку поставить кусокъ или два стеариновой свѣчи. Черезъ нѣсколько минутъ бумага сырѣетъ.

Для серебренія берутъ растворъ 15 g ляписа въ 50cm³ дест. воды, вливаютъ сюда растворъ 10 g лимонной кислоты и 7 g сахара въ 50 cm³ дест. воды, а затѣмъ 5 cm³ глицерина, наливаютъ часть этого раствора на блюдце и, намочивъ въ немъ плоскую и широкую барсуковую кисть, проводятъ ею по бумагѣ, стараясь какъ можно меньше нажимать. Каждый мазокъ дѣлаютъ возможно быстро и сейчасъ же, намочивъ кисть, проходятъ слѣдующую полосу такъ, чтобы ея край сливался съ краемъ предыдущей. Когда такимъ образомъ пройденъ весь листъ, его поворачиваютъ на 90⁰ и снова проходятъ кистью, но уже не намачивая ее въ растворѣ серебра. Давъ листу полежать, пока растворъ серебра не впитается на столько, что уже не будетъ стекать,

---

*) Если желательно получить цвѣтную бумагу, то полученную массу подкрашиваютъ насыщеннымъ воднымъ растворомъ фуксина или метилъ-віолета (20—40 капель).

**) Бумагу можно брать писчую министерскую, бристольскую, гравюрную (для небольшихъ отпечатковъ), александрійскую, ватманскую (большіе фигуры, портреты, пейзажи).

его подвѣшиваютъ для просушки, а когда листъ высохъ, спинку его протираютъ при помощи губки растворомъ:

лимонной кислоты . . . . 6 g
воды . . . . 75 cm^3
спирта 95° . . . . 25 „

и снова подвѣшиваютъ сушить.

Приготовленная такимъ образомъ бумага можетъ быть сохраняема нѣсколько мѣсяцевъ въ тепломъ и сухомъ мѣстѣ. Для виражъ-фиксажа авторъ рекомендуетъ:

отварной воды . . . . 600 cm^3
гипосульфита . . . . 80 g

по раствореніи сюда надо прибавить

сплавленнаго уксусно-кисл. натра . . . . 4 g
очищенной поваренной соли . . . . 10 „

Затѣмъ растираютъ въ ступкѣ 25 g уксуснокислаго свинца съ водой и когда онъ растворится прибавляютъ еще воды, такъ чтобы всего на 25 g свинцовой соли взять 200 cm^3 воды, и полученный растворъ вливаютъ въ первый. Сюда прибавляютъ еще 150 cm^3 раствора 1 грамма коричневаго хлорнаго золота въ 600 cm^3 воды, 5 g мѣла и 5 g талька, оставляютъ на сутки, по временамъ размѣшивая, а затѣмъ фильтруютъ. При вирированіи не доводятъ отпечатки до желаемаго тона, а вынимаютъ ихъ нѣсколько раньше и кладутъ минутъ на 5 въ свѣжій 5% растворъ гипосульфита. Затѣмъ промываютъ въ водѣ и для окончательнаго удаленія гипосульфита обрабатываютъ іодомъ, помѣщая ихъ сложенными лицевою стороной по два въ воду, къ которой прибавлено столько раствора 6 g іодистаго калія и 6 g іода въ 100 cm^3 воды, чтобы вода приняла окраску баварскаго пива. Когда спинка отпечатковъ посинѣетъ, ихъ перекладываютъ въ чистую воду, а когда спинка снова станетъ бѣлою, переносятъ еще разъ въ чистую воду. Послѣдняя обработка способствуетъ чрезвычайной прочности отпечатковъ.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРІЯ ЭЛЛИПСА.

(Отвѣтъ на тему, предложенную профессоромъ Ермаковымъ въ № 110 „Вѣстника“).

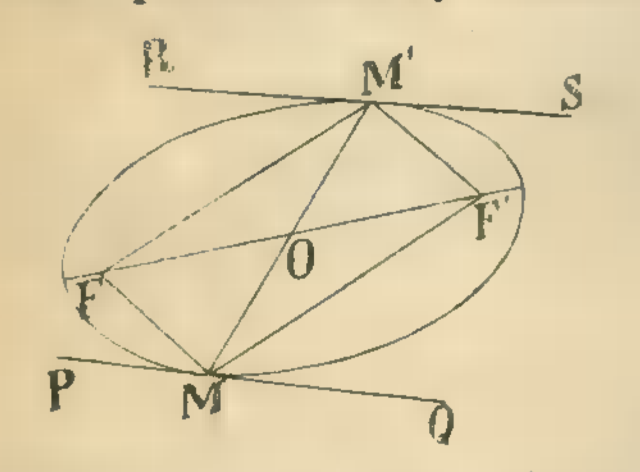
(Продолженіе).*

44. Теорема. *Касательныя, проведенныя въ концахъ хорды, проходящей черезъ центръ эллипса, параллельны.*

Пусть MM′—(черт. 29) хорда, проходящая черезъ центръ эллипса O; PQ и RS—прямыя, касательныя къ эллипсу соотвѣтственно въ точкахъ M и M′.

*) См. „Вѣстника Оп. Физики“ №№ 239, 240, 242, 243 и 244.

Соединимъ точки M и M′ съ фокусами. Треугольники FOM и F′OM′ равны между собою, такъ какъ стороны OF и OM (см. § 15) равны соотвѣтственно сторонамъ OF′ и OM′, углы же FOM и F′OM′ равны, какъ вертикальные. Изъ равенства этихъ треугольниковъ слѣдуетъ, что



Фиг. 29.

$$FM = F'M'.$$

Подобнымъ же образомъ докажемъ, что $F'M = FM'$. Итакъ, фигура FMF′M′ есть параллелограмъ, а потому углы F′MF и FMM′ равны соотвѣтственно угламъ FM′F′ и MM′F′. Отсюда слѣдуетъ, что углы, смежные соотвѣтственно угламъ F′MF и FM′F′, равны между собою, а потому и половины ихъ FMP и F′M′S (см. § 26) равны. Складывая равенства

$$\angle FMM' = \angle MM'F'$$

и

$$\angle FMP = \angle F'M'S,$$

получимъ, что

$$\angle PMM' = \angle MM'S,$$

откуда и вытекаетъ параллельность касательныхъ PQ и RS.

Слѣдствіе. *Прямыя, соединяющія фокусы съ концами хорды* MM′, (черт. 29) *образуютъ съ касательными* PQ *и* RS *равные между собою углы* FMP, F′MQ, FM′R *и* F′M′S.

Дѣйствительно, только что было доказано, что

$$\angle FMP = \angle F'M'S.$$

По свойству касательной имѣемъ, что (§ 26, сл. 2)

$$\angle FMP = \angle F'MQ.$$

Точно также найдемъ, что

$$\angle F'M'S = \angle FM'R,$$

а потому

$$\angle FMP = \angle F'MQ = \angle F'M'S = \angle FM'R.$$

Обратная теорема. *Прямая, соединяющая точки прикосновенія параллельныхъ касательныхъ, проходитъ черезъ центръ эллипса.*

Пусть M и M′—точки прикосновенія двухъ параллельныхъ касательныхъ PQ и RS.

Допустимъ, что прямая MM′ не проходитъ черезъ центръ эллипса; тогда, соединяя прямой точку M съ центромъ эллипса O, мы получимъ на пересѣченіи прямой MO съ эллипсомъ (см. § 15) нѣкоторую точку M″, отличную отъ точекъ M и M′. Тогда касательныя въ точкахъ M и M″, по предыдущей теоремѣ, были бы параллельны, а такъ какъ, по предположенію, касательныя въ точкахъ M и M′ также параллельны, то мы имѣли бы три параллельныхъ касательныхъ, что (§ 37) невозможно.

Слѣдствіе. *Прямыя, соединяющія точки прикосновенія двухъ параллельныхъ касательныхъ съ фокусами, одинаково наклонены къ этимъ касательнымъ.*

Пусть M и M′ точки прикосновенія двухъ параллельныхъ касательныхъ PQ и RS (черт. 29). Проведемъ хорду MM′, которая, какъ мы уже знаемъ, проходитъ черезъ центръ эллипса O. Тогда, согласно съ предыдущимъ слѣдствіемъ, получимъ:

$$\angle FMP = \angle F'MQ = \angle F'M'S = \angle FM'R.$$

45. Изъ прямой и обратной теоремы предыдущаго § вытекаютъ противоположная и обратнопротивоположная теоремы:

1) *касательныя въ концахъ хорды, не проходящей черезъ центръ, пересѣкаются;*

2) *если двѣ касательныя пересѣкаются, то хорда, соединяющая ихъ точки прикосновенія, не проходитъ черезъ центръ.*

Такимъ образомъ необходимое и достаточное условіе параллельности касательныхъ есть прохожденіе черезъ центръ хорды, соединяющей точки прикосновенія этихъ касательныхъ; а необходимое и достаточное условіе пересѣченія двухъ касательныхъ состоитъ въ томъ, чтобы хорда, соединяющая точки ихъ прикосновенія, не проходила черезъ центръ.

46. **Теорема.** *Центръ эллипса и точка встрѣчи двухъ пересѣкающихся касательныхъ лежатъ по разныя стороны прямой, соединяющей точки прикосновенія касательныхъ.*

Пусть E (черт. 30) — точка пересѣченія касательныхъ ET и ET′, а T и T′—ихъ точки прикосновенія:

Фиг· 30.

Такъ какъ центръ эллипса O лежитъ внутри эллипса, то (§ 36, слѣдствіе) онъ лежитъ также внутри угла TET′. Предположимъ, что точка O лежитъ по ту же сторону прямой TT′, какъ и точка E; тогда, лежа внутри угла TET′, центръ эллипса O непремѣнно лежитъ внутри треугольника TET′.

Построимъ точку эллипса t, симметричную съ точкой T относительно центра O (§ 15); точка эта, лежа на лучѣ TO, всѣ точки котораго лежатъ по ту же сторону прямой TT′, какъ и точка E, и, будучи въ то же время точкой эллипса, также лежитъ внутри (§ 36) треугольника TET′. Проведемъ касательную te къ эллипсу въ точкѣ t; по теоремѣ § 44 эта касательная параллельна касательной TE. Но прямая te, проходя черезъ точку t, лежащую внутри треугольника TET′ и будучи параллельна сторонѣ ET этого треугольника, встрѣчаетъ сторону его TT′ въ нѣкоторой точкѣ I, лежащей (§ 9) внутри эллипса. Такимъ образомъ касательная te проходила бы черезъ точку I, лежащую внутри эллипса, что невозможно (§ 24, сл. 3). Изъ 2-й теоремы, указанной въ § 45, слѣдуетъ также, что центръ O, хотя и лежитъ внутри угла TET′, но находится внѣ треугольника TET′.

Слѣдствіе 1-е. *Оба фокуса не могутъ лежать одновременно внутри треугольника* TET′ (черт. 30), *вершины котораго* T *и* T′ *суть точки прикосновенія двухъ пересѣкающихся касательныхъ*, a E — *точка ихъ встрѣчи.*

Дѣйствительно, если бы оба фокуса F и F′ лежали внутри треугольника TET′, то и средина отрѣзка FF′, т. е. центръ эллипса, лежала бы внутри треугольника TET′; а это невозможно.

Подобнымъ же образомъ можно доказать, что если одинъ изъ фокусовъ лежитъ на прямой TT′, соединяющей точки прикосновенія двухъ касательныхъ, пересѣкающихся въ точкѣ E, то другой фокусъ лежитъ внѣ треугольника TET′.

Слѣдствіе 2-е.—Пусть T и T′ точки прикосновенія двухъ пересѣкающихся касательныхъ, точку встрѣчи которыхъ назовемъ черезъ E. Пусть O—центръ эллипса. (черт. 31).

Всякая точка эллипса, лежащая внутри угла TOT′ *лежитъ, кромѣ того, внутри треугольника* TET′.

Замѣтимъ, прежде всего, что внутри угла TOT′ лежитъ безчисленное множество точекъ эллипса. Въ самомъ дѣлѣ, на всякомъ лучѣ, исходящемъ изъ точки O и лежащемъ внутри угла TOT′, находится непремѣнно одна и только одна точка эллипса. Возьмемъ одну изъ точекъ эллипса, лежащихъ внутри угла TOT′; назовемъ эту точку черезъ x.

Фиг. 31.

Допустимъ, что точка x не лежитъ внутри треугольника TET′; тогда она, находясь (§ 35) внутри угла TET′, должна лежать либо на прямой TT′, либо внутри треугольника TOT′; это слѣдуетъ изъ того, что точки E и O лежатъ по разныя стороны прямой TT′ (§ 46).

Первое изъ этихъ предположеній—что точка x лежитъ на прямой TT′—немыслимо, такъ какъ тогда прямая TT′ встрѣчала бы эллипсъ въ трехъ точкахъ x, T и T′, что невозможно.

Разсмотримъ теперь второе предположеніе, а именно допустимъ, что точка x лежитъ внутри треугольника TOT′.

Лучъ Ox встрѣчаетъ хорду TT′ въ нѣкоторой ея промежуточной точкѣ y, которая лежитъ внутри (§ 9) эллипса.

Такъ какъ концы отрѣзка Oy оба лежатъ внутри эллипса, то точка этого отрѣзка x (§ 12, сл. 2) также лежитъ внутри эллипса, что противорѣчитъ сдѣланному предположенію, что точка x есть точка эллипса.

Гюго Гильденъ.
(НЕКРОЛОГЪ).

Не прошло и мѣсяца со дня кончины Тиссерана, какъ смерть произвела новое опустошеніе въ рядахъ астрономовъ, сведя въ могилу одного изъ виднѣйшихъ представителей науки о небѣ, астронома Королевской Академіи Наукъ въ Стокгольмѣ и директора Стокгольмской Обсерваторіи, Гюго Гильдена (Hugo Gyldén).

Гюго Гильденъ родился 29 мая 1841 г. въ Гельсингфорсѣ, гдѣ его отецъ былъ профессоромъ университета, и тамъ же получилъ образованіе. Послѣ онъ работалъ въ Готѣ и въ Пулковѣ. Работы эти доставили ему такую извѣстность, что уже въ 1871 году Стокгольмская Академія Наукъ довѣрила ему свою обсерваторію, хотя молодому астроному тогда было всего 30 лѣтъ.

Главнымъ трудомъ Гильдена является его „Трактатъ объ абсолютныхъ орбитахъ восьми главныхъ планетъ". Трудъ этотъ, представляющій детальную разработку теоріи пертурбацій, остался, однако, незаконченнымъ: — изъ трехъ томовъ, которые предполагалось издать, вышелъ лишь одинъ. Многочисленные ученики знаменитаго астронома довершатъ, вѣроятно, эту капитальную работу своего учителя.



Гюго Гильденъ.

Кромѣ этого чисто теоретическаго труда Гильденъ много занимался и астрономическими наблюденіями. Изъ различныхъ странъ Европы въ его обсерваторію собирались многочисленные ученики, которымъ онъ

умѣлъ передать воодушевлявшую его любовь къ наукѣ. Свои досуги онъ посвящалъ музыкѣ и живописи.

„Онъ былъ истиннымъ главою школы“, говоритъ о немъ Callandreau, „его благородство вызывало почтенiе, а его простой и сердечный характеръ вселялъ любовь“.

N.

Н. А. Конопацкiй.
(НЕКРОЛОГЪ).

28 октября скончался въ Каменецъ-Подольскѣ послѣ продолжительной и тяжкой болѣзни заслуженный преподаватель мѣстныхъ мужской и женской гимназiй, статскiй совѣтникъ Николай Адамовичъ Конопацкiй.—Родился Н. Ад. въ Ярославлѣ, въ 1850 г. 14-го февраля. Окончивъ въ 1866 г. гимназiю съ серебряной медалью, онъ поступилъ въ технологическiй институтъ, но на третьемъ курсѣ простудился и заболѣлъ кровохарканьемъ. По совѣту врачей онъ оставилъ ученье и переѣхалъ на югъ, въ м. Ольгополь и началъ тамъ преподавать математику въ двухклассномъ училищѣ. 31 августа 1873 года онъ былъ перемѣщенъ въ Каменецъ-Подольскъ въ городское двухклассное училище, а въ 1875 г. назначенъ исправляющимъ должность преподавателя Острожской учительской семинарiи. Въ 1876 г. онъ оставилъ эту должность и, выдержавъ испытанiя въ физико-математическомъ факультетѣ университета Св. Владимiра, былъ удостоенъ степени кандидата физико-математическихъ наукъ и занялъ затѣмъ мѣсто преподавателя въ Каменецъ-Подольской гимназiи.

Н. А. Конопацкiй принадлежалъ къ числу тѣхъ немногихъ, къ сожалѣнiю, людей, которые довольствуются своимъ скромнымъ положенiемъ и съ любовью относятся къ своему дѣлу, какъ бы мало оно ни было. Онъ, какъ говорилъ надъ его могилой одинъ изъ сослуживцевъ, не пробавлялся ходячими фразами и мнѣнiями, а жилъ и мыслилъ выработанными своимъ свѣтлымъ умомъ убѣжденiями; не покоился на лонѣ нравственнаго безразличiя, а *велъ въ жизни свою линiю* — и это была прямая линiя правды, чести и любви. Онъ строго относился къ себѣ и къ своимъ обязанностямъ, не искалъ дешевой популярности среди своихъ учениковъ, точно и аккуратно выполнялъ свои обязанности, и даже за нѣсколько дней до смерти терзался мыслью, что безъ пользы для учениковъ пропадаютъ отведенные ему часы уроковъ. Требовательный по отношенiю къ самому себѣ онъ былъ столь же требователенъ и по отношенiю къ другимъ. Вотъ почему у него было много почитателей, были враги, но не было друзей. Онъ никогда ни единымъ словомъ не давалъ почувствовать своего умственнаго превосходства, никогда не позволилъ себѣ обидѣть въ комъ либо его человѣческое достоинство.... Изъ скуднаго учительскаго заработка онъ до самой смерти

посылалъ по 15 р. въ мѣсяцъ старику дядѣ, содержалъ въ С.-Петербургскомъ университетѣ двухъ стипендіатовъ изъ своихъ бывшихъ учениковъ, посылая каждому по 25 р. ежемѣсячно, посылалъ по 15 р. въ мѣсяцъ бѣдной родственницѣ. Не было горя, мимо котораго Н. Ад. прошелъ бы хладнокровно, не желая помочь.

Въ педагогической литературѣ Н. Ад. Конопацкій извѣстенъ какъ авторъ: „Плана преподаванія геометріи въ городскихъ училищахъ" и обладающаго многими достоинствами „Систематическаго курса ариѳметики" (Каменецъ-Подольскъ, 1877). Читатели нашего журнала помнятъ, конечно, его прекрасную статью: „Солнце", печатавшуюся въ I и II семестрахъ „Вѣстника". Отмѣтимъ еще его переводъ рѣчи Споттисвуда: „О связи математики съ другими науками".

Хоронили Николая Адамовича 30-го октября. Гробъ его утопалъ въ массѣ цвѣтовъ. Провожалъ его останки весь составъ учителей гимназіи съ директоромъ во главѣ и старшіе классы мужской и женской гимназій. На могилѣ были произнесены три прочувствованныя рѣчи.

Миръ праху твоему, честный, скромный и полезный труженикъ!

РЕЦЕНЗІИ.

Возраженіе на рецензію г. Шатуновскаго, о моей брошюрѣ: „Къ ученію о дифференціалѣ и интегралѣ", помѣщенную въ № 243 „Вѣстника Опытной Физики" за 1896 г.

Г-нъ Шатуновскій заявляетъ, что я не желаю, чтобы дифференціаломъ перемѣнной $y=f(x)$ называли, какъ это теперь общепринято, извѣстную часть $f'(x).dx$ ея полнаго приращенія, а желаю, чтобы дифференціаломъ называли полный произвольно малый приростъ перемѣнной, т. е. выраженіе $f'(x) \cdot dx + E$, и что думаю, что такимъ опредѣленіемъ вносится особая ясность въ понятіе о дифференціалѣ и интегралѣ. Г. Шатуновскій, находитъ, что такимъ опредѣленіемъ дифференціала вносится чрезвычайная смута, сбивчивость и крайняя условность въ дальнѣйшее изложеніе дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія, что свидѣтельствуетъ историческій и педагогическій опытъ.

Лейбницъ, въ предложенномъ имъ способѣ безконечно малыхъ, безконечно малое приращеніе перемѣнной величины называетъ дифференціаломъ и обозначаетъ буквою d, поставленною передъ разсматриваемою величиною, такъ что называя б. м. приращеніе x черезъ dx, полагая $y=f(x)$, имѣемъ: $dy=f(x+dx)-f(x)$; вотъ, что говорится въ математическомъ лексиконѣ академика Буняковскаго на 410. Изъ этого видно, что называть дифференціаломъ полный произвольно малый приростъ перемѣнной, т. е. выраженіе: $f'(x)dx+E$, есть не мое измышленіе. Правда, великій Лейбницъ поставилъ требованіе, чтобы двѣ величины, различествующія между собою количествомъ безконечно малымъ въ сравненіи съ каждою изъ нихъ, могли быть принимаемы безъ различія между собою, и вслѣдствіе этого за приращеніе функціи или за приростъ, какъ выражается С. Шатуновскій принимается первый членъ разности $f(x+dx)-f(x)$, который и будетъ общепринятымъ дифференціаломъ функціи.

Своимъ вышеприведеннымъ требованіемъ Лейбницъ только упростилъ методъ нахожденія дифференціаловъ, безъ ущерба строгости. Я согласно со всѣми принимаю обычное опредѣленіе дифференціала, какъ произведенія $f'(x).dx$ и разсматриваю его, какъ самую простую изъ безконечно малыхъ, которою можно замѣнить подъ знакомъ предѣла приращеніе функціи, не нарушая величины предѣла, но обращаю въ своей брошюрѣ вниманіе на желательность болѣе обстоятельнаго

разъясненія основныхъ понятій о дифференціалѣ и интегралѣ, такъ чтобы всѣ правила математическаго ученія о дифференціалахъ и интегралахъ представлялись въ умѣ изучающихъ, какъ сокращенная и вполнѣ законная метода нахожденія б. м. приращеній функцій и суммированія этихъ приращеній. Я желалъ бы только, чтобы болѣе обращалось вниманія на полную законность пренебреженія б. м. членами высшихъ порядковъ, при нахожденіи приращенія функціи, и на уясненіе полноправности пренебреженія, и на указаніе урѣзанной части интеграла, представляющей б. м. величину порядка выше 1-го. Дюрингъ въ своемъ сочиненіи „Критическая исторія общихъ принциповъ механики", удостоенномъ философскимъ Геттингенскимъ факультетомъ 1-ой преміи Бенеке, затрагиваетъ тотъ же вопросъ объ дифференціальномъ и интегральномъ исчисленіи, касающійся уясненія истиннаго значенія дифференціала и интеграла, и указываетъ на слишкомъ поверхностное отношеніе педагоговъ къ сообщенію основныхъ понятій о дифференціалѣ и интегралѣ. Онъ прямо указываетъ на то, что пріемъ исчисленія съ настоящими дифференціалами надо разсматривать, какъ сокращенную методу, уясненіе чего и желательно.

Всѣмъ сказаннымъ достаточно выясняется, что не отвергая общепринятаго опредѣленія дифференціала, придерживаясь его строго, я хотѣлъ только обратить вниманіе на желательность большаго уясненія, что пріемъ исчисленія съ настоящими дифференціалами есть сокращенная метода, и выразилъ желаніе, чтобы учащіеся болѣе осмысленно къ этому относились. Поэтому заявленіе г. Шатуновскаго въ его рецензіи, что мое яко бы опредѣленіе дифференціала, какъ $f'(x).dx + E$ съ педагогической точки зрѣнія прямо вредно и представляетъ возвратъ къ очень старой терминологіи, отъ которой теперь безусловно отказываются, а также, что книжка моя вообще не заключаетъ ничего новаго и вредна по тенденціи, вполнѣ не основательно.

Авторъ рецензіи моего труда, помѣщенной въ журналѣ „Природа и Люди" № 5 за настоящій годъ вполнѣ понялъ и оцѣнилъ значеніе моей брошюры словами: „Нельзя не пожелать брошюрѣ В. Шидловскаго широкаго распространенія; обращаемъ на нее серьезное вниманіе преподавателей и тѣхъ изъ учащихся, которые дѣйствительно интересуются предметомъ и не довольствуются рутиною, низводящею его на степень механическихъ пріемовъ дифференцированія и интегрированія".

Что касается до того, что г. Шатуновскій находитъ повидимому мою книжку дорогой 40 к. с., при объемѣ въ 15 стр., то по поводу этого замѣчу, что цѣнность книжки опредѣляется не однимъ числомъ страницъ, но ея содержаніемъ, трудомъ на нее потраченнымъ, и наконецъ при какихъ условіяхъ она издается.

Въ заключеніе не могу не пожалѣть, что г. Шатуновскій слишкомъ мало вдумался въ содержаніе моей брошюры и приписалъ мнѣ такія нововведенія, которыя были предложены безсмертнымъ Лейбницемъ.

Преподаватель *Владимiръ Шидловскій* (Полоцкъ)

Возвышеніе въ степень многочленовъ и чиселъ и извлеченіе корней изъ чиселъ. Формулы дѣленія $a^m \pm b^m$ на $a \pm b$. Составилъ И. Злотчанскій, преподаватель Одесскаго реальнаго училища Св. Павла. Цѣна 30 коп. Одесса, 1897.

Указавъ на тотъ фактъ, что извлеченіе корней изъ чиселъ есть одна изъ трудныхъ статей алгебры, авторъ говоритъ: „Цѣль моя устранить указанныя затрудненія. Я даю операціи возвышенія въ квадратъ и кубъ многозначныхъ чиселъ и на нихъ основываю операціи извлеченія квадратнаго и кубичнаго корней изъ чиселъ. Выводъ этихъ операцій отличается, какъ мнѣ кажется, простотою и строгостью доказательства". Мы вполнѣ согласны съ авторомъ въ томъ, что статья объ извлеченіи корней изъ чиселъ представляется трудной для учениковъ въ томъ видѣ, какъ она обыкновенно излагается въ курсахъ алгебры, и находимъ вполнѣ цѣлесообразнымъ искать устраненія этихъ трудностей въ болѣе детальномъ анализѣ результатовъ, получаемыхъ отъ возвышенія чиселъ въ степень. Съ этой точки зрѣнія небезуспѣшная попытка г-на Злотчанскаго заслуживаетъ вниманія гг. преподавателей и составителей учебниковъ. Мы не можемъ однако согласиться съ тѣмъ, чтобы дока-

зательства г-на Злотчанскаго отличались безукоризненной строгостью, хотя и увѣрены въ томъ, что автору понадобится немного труда для того, чтобы удовлетворить читателя и въ этомъ отношенiи. Остановимся, напримѣръ, на стран. 5 пунктъ 5. „*Слѣдствiя.* 1) *Отъ приписыванiя къ числу одной цифры справа количество цифръ квадрата числа увеличивается на двѣ цифры,* потому что къ квадрату числа надо *приписать* (нашъ курсивъ) удвоенное произведенiе числа на приписанную цифру и квадратъ приписанной цифры, выступая каждый разъ вправо на одну цифру". На самомъ дѣлѣ приведеннымъ разсужденiемъ не доказанъ защищаемый авторомъ тезисъ, а доказано только, что отъ приписыванiя къ числу одной цифры число цифръ квадрата увеличивается *по крайней мѣрѣ* на двѣ цифры. Неполнота доказательства произошла, какъ намъ кажется, отъ неточнаго употребленiя подчеркнутаго выше термина „приписать", который здѣсь обозначаетъ не приписыванiе въ общеупотребительномъ смыслѣ, а нѣкоторый способъ подписыванiя чиселъ и послѣдующее ихъ сложенiе. Для полноты доказательства тезиса недостаточно показать только, что съ правой стороны прибавятся двѣ цифры: нужно показать также, что съ лѣвой стороны не прибавится ни одной. Недостаточность доказательства легко однако можетъ быть устранена введенiемъ обычной теоремы, относящейся до числа цифръ квадрата. Будемъ надѣяться, что самъ авторъ или тѣ, которые въ своихъ руководствахъ будутъ держаться системы изложенiя, указанной авторомъ, пополнятъ указанный пробѣлъ.

С. Шатуновскiй (Одесса).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Отношенiе металловъ и ихъ солей къ обыкновенному свѣту и къ лучамъ Рёнтгена. (*J. H. Gladstone* и *W. Hibbert*. Chem. News. LXXIV,235). — Какъ извѣстно, всѣ металлы вполнѣ поглощаютъ въ твердомъ состоянiи обыкновенный свѣтъ и только (?) лишь тончайшiе слои золота и серебра пропускаютъ ничтожное количество опредѣленныхъ лучей. Это отношенiе къ свѣту совершенно измѣняется, когда металлъ соединяется съ кислотнымъ радикаломъ; не существуетъ вполнѣ непрозрачныхъ солей. Что же касается до растворовъ солей, то растворы безцвѣтныхъ солей обыкновенно безцвѣтны, если, конечно, безцвѣтенъ растворитель, растворы цвѣтныхъ солей сохраняютъ въ большинствѣ случаевъ цвѣтъ сухой соли.

Совершенно иначе относятся эти вещества къ лучамъ Рёнтгена. Всѣ металлы, поскольку они изслѣдованы, пропускаютъ въ большей или меньшей степени x-лучи. *Gladstone* и *Hibbert* нашли, что легчайшiй металлъ, литiй, почти совершенно прозраченъ для x-лучей и что, начиная отъ него, прозрачность постепенно уменьшается съ увеличенiемъ плотности до золота, почти совершенно непрозрачнаго для x-лучей. Соединяясь съ кислотными радикалами, образуя соли, металлы сохраняютъ свою непрозрачность, такъ что соли металловъ относятся совершенно различно къ обыкновенному свѣту и къ лучамъ Рёнтгена. Авторы доказали также, что между прозрачностью металловъ для x-лучей и ихъ плотностью нѣтъ правильной зависимости. Такъ напр. щелочные металлы, по своей прозрачности для x-лучей, располагаются въ рядъ:

литiй, натрiй, калiй,

хотя натрій тяжеле калія. Повидимому всѣ металлы по своей непрозрачности для лучей Рёнтгена идутъ въ томъ же порядкѣ, что и по своимъ *атомнымъ вѣсамъ*.

Изъ опытовъ *Gladstone*'а и *Hibbert*'а слѣдуетъ также, что способность поглощать x-лучи является для твердыхъ солей аддитивнымъ свойствомъ: она равна суммѣ поглощательныхъ способностей металла и кислотнаго радикала. Поглотительная способность растворовъ равна суммѣ поглотительныхъ способностей соли и растворителя. (Naturwiss. Rundsch.).

Растворимость свинца и висмута въ цинкѣ. Критическая температура для сплавовъ. (*W. Spring* и *Л. Романовъ*. Zeitschr. für anorg. Chemie XIII,29). — Совокупность фактовъ, наблюдаемыхъ при сплавленіи металловъ, приводитъ къ выводу, что сплавы вполнѣ аналогичны растворамъ и что главнѣйшіе законы, установленные для растворовъ, приложимы также и къ сплавамъ. Проф. *Алексѣевъ* показалъ, что для каждыхъ двухъ жидкостей, способныхъ растворяться одна въ другой, существуетъ своя критическая температура, при которой онѣ смѣшиваются въ произвольныхъ неограниченныхъ количествахъ. Такъ напр., если смѣшать сѣрный эфиръ съ водой, то смѣсь быстро раздѣляется на два слоя, изъ которыхъ верхній, эфирный, представляетъ собою растворъ 3% воды въ эфирѣ, нижній, водный—растворъ 1,2% эфира въ водѣ. Съ повышеніемъ температуры взаимная растворимость жидкостей увеличивается и при критической температурѣ онѣ смѣшиваются въ неограниченныхъ количествахъ.

Большая часть металловъ способны сплавляться другъ съ другомъ въ неограниченныхъ количествахъ, подобно тому какъ смѣшиваются напр. спиртъ и вода. Существуютъ однако и такія пары металловъ, гдѣ одинъ металлъ растворяется въ другомъ при опредѣленной температурѣ лишь въ нѣкоторомъ опредѣленномъ количествѣ, и если жидкій сплавъ оставить на нѣкоторое время въ покоѣ, то онъ раздѣляется на два слоя, подобно водѣ и эфиру. Сюда относятся напримѣръ свинецъ и цинкъ, висмутъ и цинкъ.

Spring и Романовъ доказали, что для этихъ металловъ существуетъ тоже своя критическая температура, при которой они неограниченно смѣшиваются другъ съ другомъ.

Опыты производились такимъ образомъ: сперва металлы смѣшивались въ тиглѣ при постоянной температурѣ, затѣмъ тигель оставлялся въ покоѣ при той же температурѣ, такъ что жидкій сплавъ раздѣлялся на два слоя. Изъ обоихъ слоевъ брались пробы и по охлажденіи подвергались анализу. Такъ какъ температура плавленія висмута $= 268^0$, свинца $= 334^0$, и цинка $= 419^0$, а при 1000^0 цинкъ уже закипаетъ, то опыты велись при температурахъ отъ 268 до 1000^0. Температуры ниже 500^0 измѣрялись ртутнымъ термометромъ съ сжатымъ азотомъ, выше 500^0—калориметрически, при помощи платиноваго шарика. Проба изъ верхняго слоя бралась нагрѣтой желѣзной ложкой, затѣмъ верхній слой спускался черезъ боковое отверстіе и проба бралась изъ нижняго слоя.

Если полученные результаты изобразить графически, откладывая на абсциссахъ температуры, а на ординатахъ — количества металловъ,

то каждой температурѣ соотвѣтствуютъ на ординатѣ двѣ точки, изъ которыхъ одна выражаетъ напр. растворимость Bi въ Zn, другая—растворимость при той же температурѣ Zn въ Bi. Обѣ кривыя стремятся къ одной точкѣ и для пары Bi, Zn сходятся на ординатѣ, соотвѣтствующей 850°. Тогда растворимость Bi въ Zn равна растворимости Zn въ Bi, т. е. оба металла, въ какихъ бы количествахъ ихъ ни взять, образуютъ однородный сплавъ. То же замѣчается и при температурахъ выше критической (850°). Полученныя кривыя имѣютъ тотъ же видъ, что и кривыя, найденныя проф. Алексѣевымъ для несмѣшивающихся жидкостей.

Такимъ образомъ и этотъ законъ, установленный для растворовъ, оказывается справедливымъ и для сплавовъ. (Naturwiss. Rundsch.).

В. Г.

ЗАДАЧИ.

№ 391. Показать, что если H есть ортоцентръ треугольника, I—центръ круга вписаннаго, G—центръ тяжести треугольника, а O—центръ круга описаннаго, то

$$\overline{HI}^2 + 2\overline{OI}^2 = 3\overline{IG}^2 + 6\overline{GO}^2.$$

(Заимств.) *Я Полушкинъ* (с. Знаменка).

№ 392. Черезъ точку M внутри угла XOY провести прямую AB такъ, чтобы отрѣзки OA и OB на сторонахъ угла удовлетворяли уравненію

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{l},$$

гдѣ l есть данная длина.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

№ 393. Данъ уголъ XOY и внутри его точка M. Черезъ точки O и M провести окружность, пересѣкающую стороны угла въ точкахъ A и B такъ, чтобы сумма отрѣзковъ OA и OB равнялась данной прямой l.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

№ 394. Изъ центра O внѣвписаннаго въ треугольникъ ABC круга, лежащаго въ углѣ A, радіусомъ d описана окружность. Показать, что площадь шестиугольника, вершины котораго суть точки пересѣченія построенной окружности съ линіями AO, BO, CO, равна

$$4d^2 . \cos(45^0 + \frac{A}{4}) . \cos\frac{B}{4} \cos\frac{C}{4}.$$

М. Зиминъ (Елецъ).

№ 395. Изъ центра O круга, описаннаго около остроугольнаго треугольника ABC, радіусомъ d описана окружность. По даннымъ сторонамъ треугольника ABC и по радіусу d найти площадь шестиугольника, вершины котораго суть точки пересѣченія построенной окружности съ трансверсалями AO, BO, CO.

М. Зиминъ (Елецъ).

№ 396. Найти раціональныя значенія x и y, удовлетворяющія уравненію

$$\frac{ax}{y}+\frac{y}{x}=xy.$$

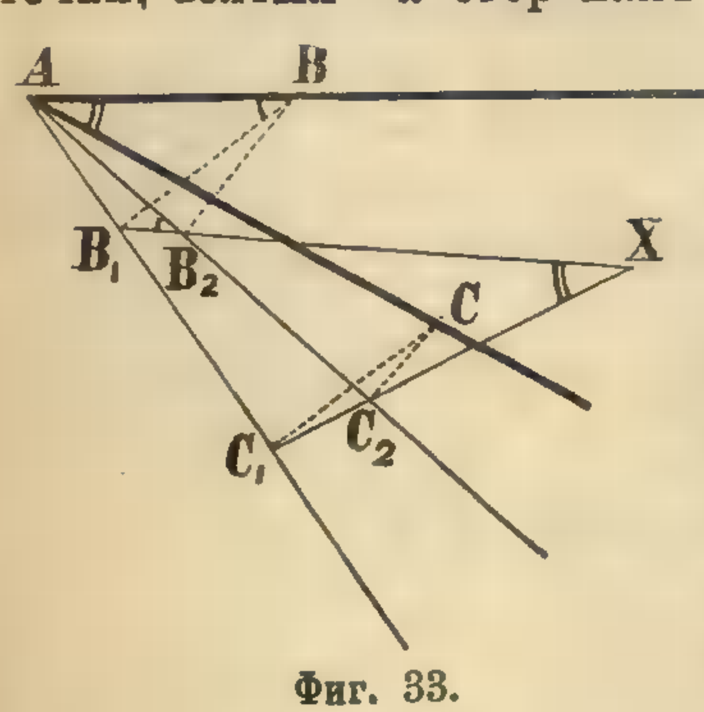
Л. Магазаникъ (Бердичевъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 304 (3 сер,).—Два угла имѣютъ общую вершину и одинъ изъ нихъ—постоянную величину. Изъ двухъ произвольныхъ точекъ, взятыхъ на сторонахъ постояннаго угла, опущены перпендикуляры на стороны другого угла и основанія перпендикуляровъ соединены прямыми.

Подъ какимъ угломъ будутъ пересѣкаться эти прямыя?

Пусть A (фиг. 33) есть общая вершина обоихъ угловъ, B и C—точки, взятыя на сторонахъ постояннаго угла, BB_1 и CC_1—перпендикуляры, опущенные изъ точекъ B и C на одну изъ сторонъ второго угла, BB_2 и CC_2—перпендикуляры, опущенные изъ тѣхъ же точекъ на другую сторону того-же угла. Пусть X есть точка пересѣченія прямыхъ B_1B_2 и C_1C_2.—Такъ какъ четыреугольники ABB_2B_1 и ACC_2C_1 вписываются въ окружность, то



Фиг. 33.

$$\angle AB_2B_1=\angle ABB_1 \text{ и } \angle AC_2C_1=\angle ACC_1;$$

изъ треугольника B_2XC_2 имѣемъ:

$$\angle X=\angle AC_2C_1-\angle AB_2B_1=\angle ACC_1-\angle ABB_1,$$

а такъ какъ

$$\angle ACC_1=\angle BCC_1-\angle BCA \text{ и } \angle ABB_1=\angle ABC-\angle B_1BC,$$

то

$$\angle X=\angle BCC_1+\angle B_1BC-(\angle BCA+\angle ABC).$$

Замѣтивъ же, что

$$\angle BCC_1 + \angle B_1BC = 180^0 \text{ и } \angle BCA + \angle ABC = 180^0 - \angle BAC,$$

найдемъ, что

$$\angle X = \angle BAC.$$

М. Зиминъ (Елецъ); *Д. Цельмеръ* (Тамбовъ).

№ 319 (3 сер.).—Показать, что предѣлъ суммы членовъ ряда

$$\frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \ldots .$$

равенъ единицѣ.

Данный рядъ можно представить въ такомъ видѣ

$$\frac{2^2 - 1^2}{(1.2)^2} + \frac{3^2 - 2^2}{(2.3)^2} + \frac{4^2 - 3^2}{(3.4)^2} + \ldots . + \frac{(n+1)^2 - n^2}{[n(n+1)]^2},$$

или

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \ldots . + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right),$$

откуда видно, что сумма n членовъ этого ряда равна

$$1 - \frac{1}{(n+1)^2},$$

что при $n = \infty$ даетъ единицу.

Э. Заторскій (Вильно); *Лежебокъ* (Ярославль); *М. Зиминъ* (Орелъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

№ 320 (3 сер.). — Показать, что въ треугольникѣ ABC разность между суммою квадратовъ линій, соединяющихъ вершину C съ лежащими на AB точками касанія M вписаннаго круга и N — внѣвписаннаго, соотвѣтствующаго сторонѣ AB, вдвое больше разности квадратовъ радіуса описаннаго круга и линіи, соединяющей центръ O описаннаго круга съ точкою M.

Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $CM = m$, $CN = n$. На основаніи теоремы Stewart'а имѣемъ:

$$a^2 . AM + b^2 . BM - m^2 . c = c . AM . BM,$$

$$a^2 . AN + b^2 . BN - n^2 . c = c . AN . BN.$$

Сложивъ эти равенства, получимъ:

$$a^2(AM + AN) + b^2(BM + BN) - c(m^2 + n^2) =$$

$$= c(AM . BM + AN . BN) \ldots \ldots \ldots . (1).$$

Но такъ какъ

$$AM = BN = p - a, \; BM = AN = p - b,$$

гдѣ p есть полупериметръ треугольника ABC, то

$$AM + AN = BM + BN = c$$

и

$$AM \,.\, BM + AN \,.\, BN = 2(p-a)(p-b);$$

равенство (1) пріобрѣтаетъ поэтому видъ:

$$(a^2+b^2)c - (m^2+n^2)c = 2c\,(p-a)(p-b)$$

или

$$a^2+b^2-(m^2+n^2) = 2(p-a)(p-b). \;.\;.\;.\;.\; (2)$$

Пусть D есть средина стороны AB. Изъ треугольника AOM имѣемъ:

$$\overline{AO}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{OM}^2 + 2AM \,.\, MD,$$

или

$$\overline{AO}^2 - \overline{OM}^2 = AM(AM + 2MD),$$

или, такъ какъ

$$AM = BN,\ AD = BD,\ MD = ND,\ AM + 2MD = AN = BM = p - b,$$

$$\overline{AO}^2 - \overline{OM}^2 = (p-a)(p-b) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3).$$

Изъ равенствъ (2) и (3) слѣдуетъ:

$$2(\overline{AO}^2 - \overline{OM}^2) = a^2+b^2-(m^2+n^2).$$

Я. Полушкинъ (с. Знаменка); *Э. Заторскій* (Москва).

№ 321 (3 сер.). — При какомъ значеніи n неопредѣленное уравненіе

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = a$$

имѣетъ наибольшее число цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній? Нулевыя рѣшенія не считаются.

Пусть A_n есть число требуемыхъ условіями задачи рѣшеній.

Если $n = 2$, то уравненіе

$$x_1 + x_2 = a$$

имѣетъ $a - 1$ рѣшеній, т. е.

$$A_2 = a - 1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1).$$

Если $n = 3$, то представивъ уравненіе

$$x_1 + x_2 + x_3 = a$$

въ видѣ

$$x_1 + x_2 = a - x_3$$

и замѣтивъ, что x_3 можетъ имѣть рядъ значеній

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ a-2,$$

получимъ $a - 2$ уравненій:

$$x_1+x_2=a-1,\ x_1+x_2=a-2,\ldots.\ x_1+x_2=2.$$

Примѣняя къ этимъ уравненіямъ формулу (1), получимъ

$$A_3=(a-2)+(a-3)+\ldots.+1=\frac{(a-1)(a-2)}{2}\ .\ .\ .\ (2).$$

Если $n=4$, то изъ уравненія

$$x_1+x_2+x_3+x_4=a$$

найдемъ

$$x_1+x_2+x_3=a-x_4$$

и, подобно предыдущему, получимъ рядъ уравненій:

$$x_1+x_2+x_3=a-1,\ x_1+x_2+x_3=a-2,\ldots.x_1+x_2+x_3=3,$$

а, пользуясь формулой (3), найдемъ

$$A_4=\frac{(a-2)(a-3)}{1.2}+\frac{(a-3)(a-4)}{1.2}+\ldots+\frac{2.1}{1.2}=$$

$$=\frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{1.2.3}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3).$$

Справедливость общей формулы

$$A_n=\frac{(a-1)(a-2)(a-3)\ldots(a-n+1)}{1.2.3\ldots.(n-1)}\ .\ .\ (4).$$

можно обнаружить заключеніемъ отъ n къ $n+1$.

Изъ формулы (4) слѣдуетъ, что A_n получается изъ A_{n-1} умноженіемъ на дробь

$$\frac{a-n+1}{n-1},$$

которая уменьшается съ возрастаніемъ n, потому что тогда числитель ея уменьшается, а знаменатель увеличивается, а потому рядъ величинъ

$$A_2,\ A_3,\ldots.A_{n-1},\ A_n$$

будетъ возрастать, пока

$$\frac{a-n+1}{n-1}>1 \text{ или } \frac{a+2}{2}>n\ .\ .\ .\ .\ .\ (5).$$

Если a есть число четное, то при

$$n=\frac{a+2}{2}$$

будетъ

$$\frac{a-n+1}{n-1}=1,$$

$$A_{n-2} < A_{n-1} = A_n > A_{n+1},$$

т. е. наибольшее число рѣшеній будетъ тогда при

$$n = \frac{a+2}{2} \text{ или } n = \frac{a}{2}.$$

Если же a есть число нечетное, то наибольшее значеніе n, удовлетворяющее неравенству (5), будетъ

$$n = \frac{a+1}{2}$$

и при этомъ значеніи данное уравненіе будетъ имѣть наибольшее число рѣшеній.

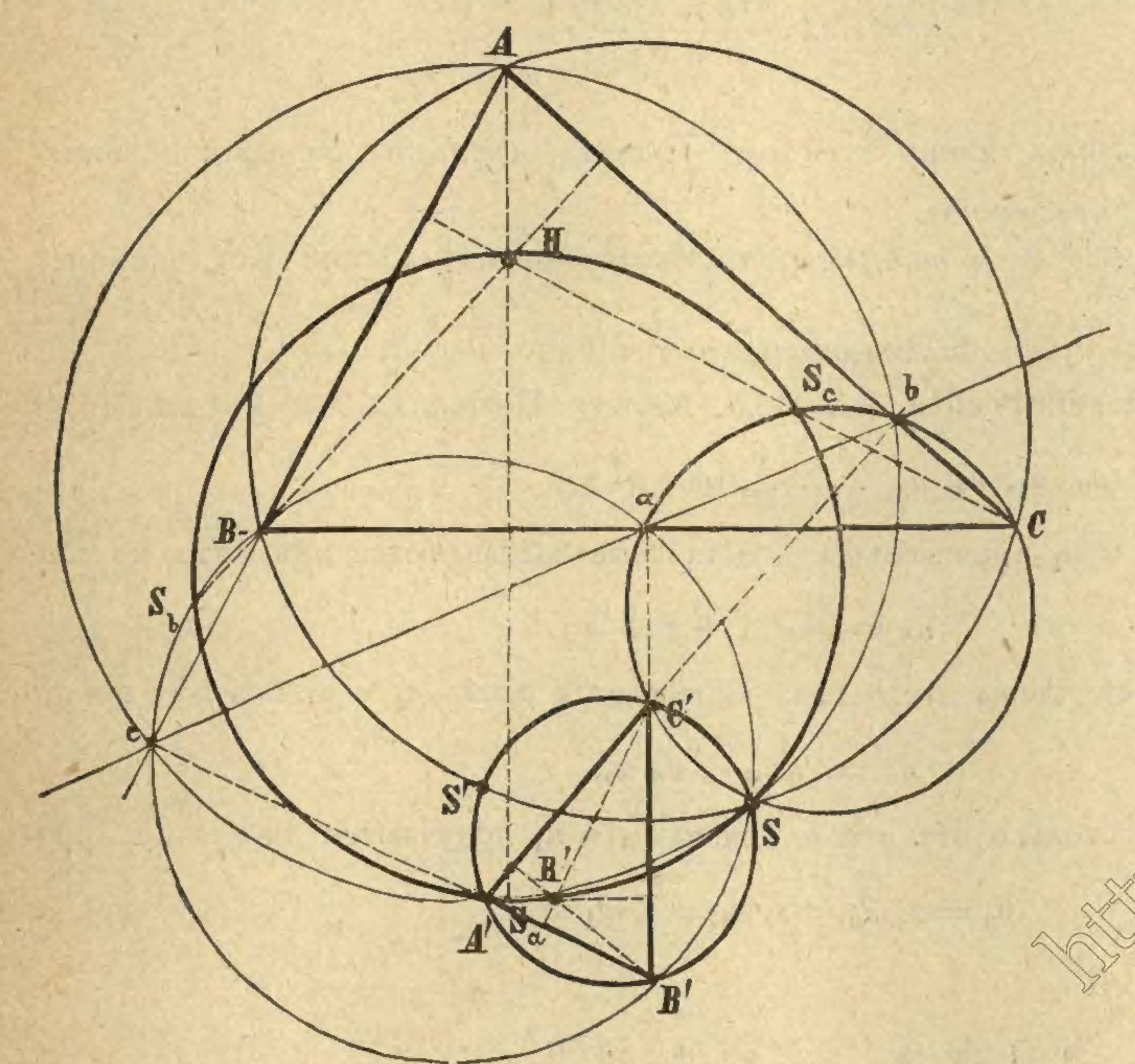
Э. Заторскій (Москва).

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

MATHESIS.

1896.—№ 4.

Sur les triangles à la fois semblables et homologiques. Par M. *V. Jerabek.* Пусть a, b, c суть точки пересѣченія сторонъ тр-ка ABC съ нѣкоторой прямой (фиг. 34). Если чрезъ a, b, c провести прямыя, составляющія съ BC, CA, AB равные углы, то получимъ тр-къ A′B′C′ подобный и одинаково расположенный съ тр-мъ ABC. Геометрическія мѣста вершинъ этого тр-ка суть окружности Abc, Bca, Cab, проходящія чрезъ одну изъ точекъ пересѣченія S окружностей ABC и A′B′C′. Такъ какъ $\angle$ ASB = C, $\angle$ A′SB′ = C′ и $\angle$ C = $\angle$ C′, то $\angle$ ASB = $\angle$ A′SB′; поэтому точка S есть центръ подобія тр-въ ABC и A′B′C′.



Фиг. 34.

При параллельномъ перемѣщеніи сѣкущей abc, прямыя B′C′, C′A′, A′B′ остаются параллель-

ными самимъ себѣ, а пересѣченія ихъ A′, B′, C′ перемѣщаются по прямымъ, проходящимъ чрезъ A, B, C и пересѣкающимся въ постоянной точкѣ S′—центрѣ гомологіи тр-въ ABC и A′B′C′. Въ предѣльномъ случаѣ тр-къ A′B′C′ можетъ обратиться въ точку S′; такъ какъ при этомъ прямыя A′B′, B′C′, C′A′ пересѣкаются въ одной точкѣ S′ и пересѣкаютъ стороны тр-ка ABC въ точкахъ a, b, c лежащихъ на одной прямой, то S′ находится на окружности ABC; по аналогіи та же точка должна быть и на окружности A′B′C′; слѣд. S′ есть вторая точка пересѣченія окружностей ABC и A′B′C′.

При вращеніи прямыхъ Ab, Bc, Ca около точекъ a, b, c такъ чтобы тр-къ ABC оставался подобнымъ самому себѣ, вершины его A, B, C перемѣщаются по окружностямъ A′bc, B′ca, C′ab.

Пусть H есть одна изъ точекъ подобно измѣняющейся фигуры ABC; такъ какъ углы BAH и CAH не измѣняются, то прямая AH вращается около нѣкоторой постоянной точки S_a окружности A′bc; прямыя BH и CH точно также вращаются около постоянныхъ точекъ S_b и S_c окружностей B′ca и C′ab.

Такъ какъ углы S_aHS_b, S_bHS_c, S_cHS_a не измѣняются, то точка H имѣетъ геометрическимъ мѣстомъ окружность $S_a S_b S_c$, которая проходитъ чрезъ точку S; ибо, если тр-къ ABC обратится въ точку S, то стороны его будутъ имѣть направленія S_a, S_b, S_c и точка H совпадаетъ съ S.

Если H есть ортоцентръ тр-ка ABC, то ось гомологіи abc тр-въ ABC и A′B′C′ есть діаметръ круга $S_a S_b S_c$. Оставляя это безъ доказательства, покажемъ, какъ отсюда выводится теорема *Sondat* (См. „Вѣстникъ“ XX, 9, Обз. Math. 1895 № 12). Положимъ, что соотвѣтственныя стороны тр-въ ABC и A′B′C′ взаимно перпендикулярны; въ этомъ случаѣ высоты ихъ AHS_a и A′H′S_a также взаимно перпендикулярны; поэтому HH′ есть діаметръ окружности $S_a S_b S_c$ и слѣд. точки H и H′ равно отстоятъ отъ діаметра той же окружности abc, въ чемъ и состоитъ теорема Sondat.

Notes mathématiques. 3. *Sur un lieu géométrique élémentaire.* (J. Neuberg).

4. *Sur une formule de Newton.* Par M. P. Mansion. Авторъ замѣтки показываетъ, что формула Ньютона

$$x = \sin x \cdot \frac{14 + \cos x}{9 + 6\cos z},$$

служащая для вычисленія длины дуги $x < \frac{\pi}{4}$, даетъ результатъ меньшій истиннаго менѣе, чѣмъ на 20¼ секундъ.

5. *Sur la définition de la multiplication.* (Извлеченіе изъ „Traité d’arithmétique“ Par Laisant et Lemoine).

Bibliographie. Précis de Trigonométrie rectiligne. Par *E. Gelin.*

Sur une suite récurrente. Par M. *J. Neuberg.* Положимъ, что въ ряду (u)

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots$$

первые два члена u_0 и u_1 произвольны, а остальные составляются изъ нихъ по плану (a, b), такъ что

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}.$$

Легко видѣть, что всѣ члены этого ряда выражаются чрезъ u_0 и u_1; поэтому можно положить

$$u_n = c_n u_1 + d_n u_0,$$

гдѣ c_n и d_n зависятъ только отъ a и b. Члены u_0 и u_1 получаются изъ этой формулы при

$$c_0 = 0,\ d_0 = 1,\ c_1 = 1,\ d_1 = 0.$$

Члены рядовъ (c) и (d):

$$c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots,$$

$$d_0, d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n, d_{n+1}, \ldots,$$

составляются по тому-же плану (a, b), какъ и члены ряда (u); ибо изъ равенствъ

$$u_{n-1} = c_{n-1}\, u_1 + d_{n-1}\, u_0,\quad u_{n-2} = c_{n-2}\, u_1 + d_{n-2}\, u_0$$

слѣдуетъ, что

$$u_n = (ac_{n-1} + bc_{n-2})\, u_1 + (ad_{n-1} + bd_{n-2})u_0,$$

а потому

$$c_n = ac_{n-1} + bc_{n-2},\quad d_n = ad_{n-1} + bd_{n-2};$$

поэтому, для вычисленія членовъ ряда (u) достаточно вычислить члены рядовъ (c) и (d), у которыхъ первые два члена суть

о и 1; 1 и о.

Вспомогательные ряды (c) и (d) легко приводятся одинъ къ другому; ибо если начальные члены одного изъ нихъ умножить на m, то и всѣ члены того-же ряда умножаются на m; а такъ какъ $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = b$, то $d_1 = bc_0$, $d_2 = bc_1$. Слѣдовательно, рядъ $d_1, d_2, d_3, \ldots$ получается чрезъ умноженіе на b членовъ ряда $c_0, c_1, c_2, \ldots$ Такимъ образомъ, задача приводится къ составленію ряда (c) и къ примѣненію формулы

$$u_n = c_n\, u_1 + bc_{n-1}\, u_0.$$

Можно также составить рядъ (u) съ помощію двухъ какихъ-нибудь рядовъ

$$v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, \ldots \text{ и } w_0, w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n, \ldots,$$

составляющихся по тому-же плану (a, b). Исключивъ c_n и d_n изъ равенствъ

$$u_n = c_n\, u_1 + d_n\, u_0,\quad v_n = c_n\, v_1 + d_n\, v_0,\quad w_n = c_n\, w_1 + d_n\, w_0,$$

получимъ

$$\begin{vmatrix} u_n & u_1 & u_0 \\ v_n & v_1 & v_0 \\ w_n & w_1 & w_0 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$u_n = \frac{w_1u_0 - u_1w_0}{v_0w_1 - v_1w_0}\, v_n + \frac{v_1u_0 - u_1v_0}{v_0w_1 - v_1w_0}\, w_n\,;$$

формула эта имѣетъ видъ

$$u_n = \mathrm{A}v_n + \mathrm{B}w_n\,,$$

гдѣ A и B зависятъ отъ первыхъ двухъ членовъ рядовъ (u), (v), (w).

Обозначивъ чрезъ α и β корни ур-нія (*équation génératrice de Lagrange*)

$$x^2 = ax + b,$$

получимъ

$$\alpha^n = a\alpha^{n-1} + b\alpha^{n-2},\quad \beta^n = a\beta^{n-1} + b\beta^{n-2};$$

положивъ затѣмъ

$$v_n = \alpha^n\,,\quad w_n = \beta^n\,,$$

получимъ

$$\mathrm{A} = \frac{u_1 - \beta^n\, u_0}{\alpha - \beta},\quad \mathrm{B} = \frac{\alpha^n\, u_0 - u_1}{\alpha - \beta}.$$

Solutions de questions proposées №№ 782, 963, 972, 975, 977, 992, CCCXV.
Questions d'examen. №№ 737—747.
Questions proposées. №№ 1064—1067.

Д. Е.

Присланы въ редакцію книги и брошюры:

73. **В. П. Мининъ,** преподаватель Московской 3-й гимназіи. **Сборникъ геометрическихъ задачъ,** примѣненный къ курсамъ гимназій, реальныхъ училищъ и другихъ среднихъ учебныхъ заведеній. Задачи алгебраической геометріи. Матеріалы для практическихъ упражненій учениковъ въ теченіи учебнаго года и темы для письменныхъ испытаній. Изданіе шестое (41-я тысяча экземпляровъ), напечатанное съ небольшими дополненіями противъ пятаго, одобреннаго для употребленія въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Ученымъ Комитетомъ Мин. Нар. Просв. и Ученымъ Комит. при Св. Синодѣ. Съ приложеніемъ собранія задачъ, рѣшаемыхъ совмѣстнымъ примѣненіемъ геометріи и тригонометріи. Изданіе кн. маг. В. Думнова. Москва, 1896. Ц. 90 к.

74. **Нѣкоторыя слѣдствія гипотезы сэра Вильяма Томсона (лорда Кельвина) о сжимаемомъ свѣтоносномъ эѳирѣ.** *Н. Н. Шиллера.* Изданіе Московскаго Математическаго Общества, состоящаго при Императорскомъ Московскомъ Университетѣ. Математическій Сборникъ, Т. XIX.

75. **Характеристика личности и научныхъ трудовъ покойнаго профессора Александра Григорьевича Столѣтова.** Профессора Университета Св. Владиміра *Н. Н. Шиллера.* Кіевъ, 1896.

76. **Александръ Григорьевичъ Столѣтовъ.** Рѣчь, произнесенная въ Физико-Математическомъ Обществѣ профессоромъ Университета Св. Владиміра *П. М. Покровскимъ.* Кіевъ, 1896.

77. **Отчетъ и протоколы Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Университетѣ Св. Владиміра за 1895 г.** Кіевъ, 1896.

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 1-го Марта 1897 г.
„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.